Hoja 9. Determinantes

1. Calcular los siguientes determinantes

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Sol: 12, -4, -1, -8.

2. Calcular los determinantes dados a continuación:

$$a)\left|\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}\right| \qquad b)\left|\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}\right|$$

Sol: a) -1, b) 1.

3. a) Comprobar que la ecuación de un plano que pasa por tres puntos (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) del espacio es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

y hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos $(1, 2, 1)$, $(-1, 3, 0)$, $(2, 1, 3)$.

b) Escribir la ecuación de una recta del plano que pasa por los puntos (a, b), (c, d) y hallar la ecuación cartesiana de la recta que pasa por los puntos $(-1, -2)$, $(2, 2)$.

4. Expresar el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}.$$

como polinomio en x factorizado en irreducibles.

5. Hallar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

usando cofactores, y luego calcular la inversa por Gauss.

6. Hallar el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

usando menores, y luego calcular el rango por Gauss.

7. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j. Probar que si A es antisimétrica de orden n, entonces $\det A = (-1)^n \det A$. Deducir de ello que las matrices antisimétricas reales (o complejas) de orden impar tienen determinante cero.

9. Hallar los determinantes de las siguientes matrices de orden n:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2-x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2-x \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mediante $f(x, y, z) = (x + by + az, ax + by + z, x + aby + z)$, decidir para qué valores de a y de b el punto $(1, a, b) \in \mathbb{R}^3$, pertenece a $\operatorname{Im} f$. Para estos a, b hallar $f^{-1}(1, a, b)$ y determinar cuando $f^{-1}(1, a, b)$ es un único elemento de $\mathbb{R}^3$.

11. Sea A una matriz real $n \times n$ tal que $\operatorname{rg} A < n$. Demostrar que existe, como mínimo, una matriz real B, $n \times n$, tal que $AB = \mathbf{0}$. Decir cuál es el rango máximo de una tal matriz B.

12. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la siguiente aplicación lineal $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f_a(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

donde

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ y_2 &= x_1 + (2-a)x_2 + x_3 + x_4; \\ y_3 &= (1+a)x_1 + (3-a)x_2 + 2x_3 + 2x_4; \\ y_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4. \end{aligned}$$

Estudiar los valores de a para los que f_a no es un automorfismo y calcular el núcleo para dichos valores de a. Además, para $a = 1$ hallar los vectores que se transforman en los vectores $(1, 1, 2, 1)$ y $(1, 1, 1, 1)$.

13. Hallar el $\det A$, donde A^T es la siguiente matriz $n \times n$,

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

A este determinante se le llama determinante de Vandermonde de orden n.

14. a) Siendo $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 = P(x)$ un polinomio de grado 3, hallar sus coeficientes para que $P(0) = 2$, $P(1) = 1$, $P(2) = -1$, $P(3) = 0$.

Sol: $2 + \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$.

b)Demostrar que siempre se puede encontrar un polinomio de grado 3 que cumpla las condiciones $\{P(x_i) = y_i\}_{i=1}^4$ siempre que todos los $x_1, \ldots, x_4$ sean distintos.

c) Generalizar el resultado b): dados n+1 pares de puntos $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n+1}$ con $x_1, \ldots, x_{n+1}$ distintos, hay un único polinomio $P(x)$ de grado n que cumple $P(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n+1$.

Obsérvese que la parte c) nos indica cómo hallar una función polinómica de grado n que pase por $n+1$ puntos del plano siempre y cuando no haya dos puntos en la misma vertical.

15. a) Obtener

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

b) Aplicar la fórmula obtenida para hallar los siguientes determinantes:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}, \qquad \left| \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I \right|$$

sol: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 7\lambda + 2$, $-\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + 1$

16. Encontrar los valores de a para que las siguientes matrices sean invertibles:

$$a)\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad b)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad c)\begin{pmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{pmatrix}$$

Sol: a) $a \neq 1$, $a \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $a \neq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ b) $a \neq 2$ y $a \neq -2$ c) $a \neq -1$ y $a \neq \frac{1}{2}$.

17. Sean matrices cuadradas $A \in M_{m\times m}$, $B \in M_{n\times n}$, $C \in M_{m\times n}$ y $D \in M_{(m+n)\times(m+n)}$ una matriz que se descompone por bloques como

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que $|D| = |A||B|$ utilizando la descomposición

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

b) Demostrar, utilizando una descomposición similar, la misma igualdad $|D| = |A||B|$, en el caso

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

(Nótese que ahora $C \in M_{n\times m}$).

c) Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 7 & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & 4 & -2 & & & \\ & & & 1 & 4 & 5 & & \\ & & & & & & 2 & 3 \\ & & & & & & & 2 \end{vmatrix}$$

Sol: -240.

18. Demostrar que si $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)\}$ son funciones tales que existen $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ verificando

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_k(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_k(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_k) & f_2(a_k) & \cdots & f_k(a_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

son funciones linealmente independientes.

Demuestra los siguientes enunciados utilizando el apartado anterior:

Los polinomios en $\{1, x-2, (x-2)^2, \cdots, (x-2)^n\} \subset P^n_{\mathbb{R}}[x]$ son linealmente independientes.

Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$, los polinomios en $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n\} \subset P^n_{\mathbb{R}}[x]$ son linealmente independientes.